ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11},\quad B=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Λύση

$$A = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11}=24:6+25-2\cdot 8+8:4+\frac{9}{11}=4+25-16+2+\frac{9}{11}$$
$$=15+\frac{9}{11}=15\frac{9}{11}.$$

$$B=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}=\left(32+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}=144:9-1+\frac{5}{7}=16-1+\frac{5}{7}$$
$$=15+\frac{5}{7}=15\frac{5}{7}.$$

Έχουμε: $A-B=15\frac{9}{11}-15\frac{5}{7}=15+\frac{9}{11}-15-\frac{5}{7}=\frac{9}{11}-\frac{5}{7}=\frac{63-55}{77}=\frac{8}{77}>0$,
οπότε θα είναι $A>B$.

Πρόβλημα 2
Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha=6$ μέτρα και πλάτος $\beta=4$ μέτρα Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:
(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, **(ii)** το εμβαδό του ορθογωνίου.

Λύση
Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2(\alpha+\beta)=2(6+4)=20$ μέτρα και το εμβαδό του είναι $E=\alpha\beta=6\cdot 4=24$ τετραγωνικά μέτρα.

Μετά την αύξηση το μήκος του ορθογωνίου θα γίνει $6+6\cdot\frac{20}{100}=6+1,2=7,2$ μέτρα,

ενώ το πλάτος του μετά τη μείωση θα γίνει $4-4\cdot\frac{5}{100}=4-0,2=3,8$ μέτρα.

Έτσι έχουμε:

(i) Η περίμετρος του ορθογωνίου μετά την μεταβολή των διαστάσεων του θα γίνει

$\Pi' = 2(7,2+3,8) = 2\cdot 11 = 22$ μέτρα, οπότε η αύξησή της είναι

$\Pi' - \Pi = 22 - 20 = 2$ μέτρα και η επί τοις εκατό αύξησή της είναι

$$\frac{\Pi' - \Pi}{\Pi} = \frac{2}{20} = \frac{10}{100}, \text{ δηλαδή } 10\%.$$

(ii) Το εμβαδό του ορθογωνίου μετά την αύξηση των διαστάσεων θα γίνει θα γίνει

$E' = 7,2\cdot 3,8 = 27,36$ τετρ.μέτρα, οπότε η μεταβολή (αύξηση) του είναι

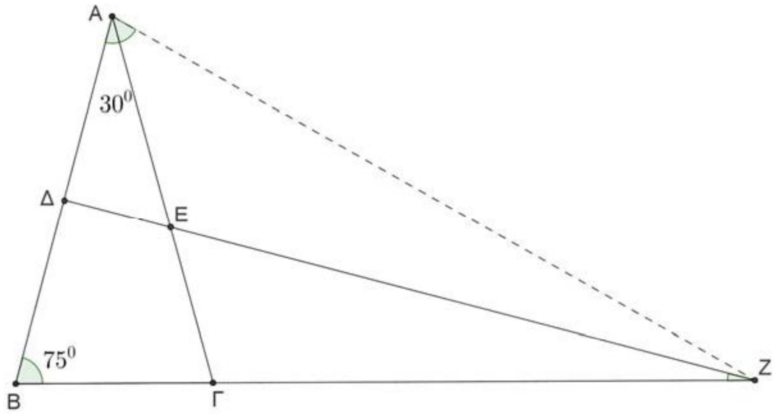
$E' - E = 27,36 - 24 = 3,36$ τετρ. μέτρα και η επί τοις εκατό αύξηση του είναι

$$\frac{E' - E}{E} = \frac{3,36}{24} = 0,14 = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } 14\%.$$

Πρόβλημα 3.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $B\hat{Z}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}Z$.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΑΒ = ΑΓ θα έχει τις απέναντι γωνίες τους ίσες, δηλαδή $A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}A = \frac{180^\circ - B\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Επειδή το Ζ είναι σημείο της μεσοκάθετης της πλευράς ΑΒ θα απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Β, δηλαδή είναι ΖΑ = ΖΒ. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές και θα έχει τις γωνίες απέναντι των ίσων πλευρών του ίσες, δηλαδή $B\hat{A}Z = A\hat{B}Z = A\hat{B}\Gamma = 75^\circ$. Τότε θα είναι $A\hat{Z}B = 180^\circ - 2\cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Η μεσοκάθετη ΖΔ της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΖΒ είναι και διχοτόμος της γωνίας του $A\hat{Z}B$, οπότε θα είναι $B\hat{Z}\Delta = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Διαφορετικά, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΔ με $B\hat{\Delta}Z = 90^\circ$, έχουμε:

$$B\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

Για τη γωνία $\Gamma\hat{A}Z$ έχουμε: $\Gamma\hat{A}Z = B\hat{A}Z - B\hat{A}\Gamma = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1, x, x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι $x=10, x+1=11$ είναι πολλαπλάσια των 10 και 11, αντίστοιχα. Επιπλέον ο 9 είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε η τριάδα 9,10,11 είναι μία λύση του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρατηρώ ότι $\text{ΕΚΠ}(10,11)=110$, οπότε για να βρω το επόμενο ζευγάρι θετικών ακέραιων που έχουν την ίδια ιδιότητα με τους 10 και 11 πρέπει να προσθέσω και στους δύο το 110 ή κάποιο πολλαπλάσιο του 110 μέχρι που να προκύψει ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1000. Έτσι έχουμε τα ζευγάρια:

120	230	340	450	560	670	780	890
121	231	341	451	561	671	781	891

Επομένως αρκεί να ελέγξουμε ποιοι από τους αριθμούς 119, 229, 339, 449, 559, 669, 779, και 889 είναι πολλαπλάσια του 3. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 339 και 669, οπότε λαμβάνουμε και τις λύσεις 339,340,341 και 669,670,671.

Παρατήρηση. Μετά την εύρεση της πρώτης λύση 9,10,11, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι για να προκύψει μία αντίστοιχη τριάδα θα πρέπει να προσθέσουμε και στους τρεις ακέραιους ένα πολλαπλάσιο του $\text{ΕΚΠ}(3,10,11)=330$. Έτσι εύκολα προκύπτουν και οι άλλες δύο λύσεις του προβλήματος 339,340,341 και 669,670,671.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης . $\text{A}=\dfrac{a-1}{\alpha-3}+\dfrac{1}{33}+a^{-1}\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{27}$, αν $a=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$.

Λύση

Έχουμε $a=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{4}=\dfrac{81}{16}$, οπότε θα είναι $a^{-1}=\dfrac{16}{81}$ και

$$\text{A}=\frac{a-1}{a-3}+\frac{1}{33}+a^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}=\frac{\frac{81}{16}-1}{\frac{81}{16}-3}+\frac{1}{33}+\frac{16}{81}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$$

$$=\frac{\frac{65}{16}}{\frac{33}{16}}+\frac{1}{33}+\frac{8}{27}+\frac{1}{27}=\frac{65}{33}+\frac{1}{33}+\frac{9}{27}=\frac{66}{33}+\frac{9}{27}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$$

Πρόβλημα 2°

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha = \frac{28}{\nu}$ και $\gamma = \frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου β των δεκάδων είναι: 0, 4, 8.

Ο ακέραιος ν πρέπει να είναι θετικός και κοινός διαιρέτης των 28 και 42, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι: 1, 2, 7, 14. Τότε οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο α είναι:

$$\alpha = 4, \text{ για } \nu = 7, \ \alpha = 2, \text{ για } \nu = 14.$$

Οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο γ είναι:

$$\gamma = 6, \text{για } \nu = 7, \ \gamma = 3, \text{ για } \nu = 14.$$

Επομένως έχουμε: $\alpha = 4,\ \gamma = 6$, για $\nu = 7$ και $\alpha = 2,\ \gamma = 3$, για $\nu = 14$.

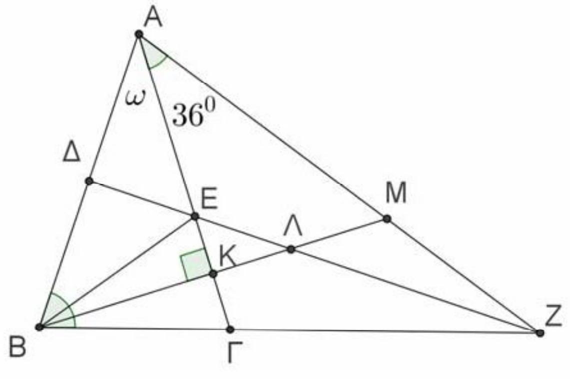
Άρα οι δυνατές τιμές του ακέραιου $\overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι: 406, 446, 486, 203, 243, 283.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \omega^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\mathrm{\Gamma\hat{A}Z} = 36^\circ$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\omega = 36^\circ$, **(β)** ΑΜ = ΓΖ, **(γ)** ΒΛ = ΛΖ.

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ θα έχουμε:

$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \omega}{2}.$$

Επειδή η ΔΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ, το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΖΑ = ΖΒ, οπότε θα έχουμε:

$$\mathrm{Z\hat{A}B} = \mathrm{Z\hat{B}A} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \hat{\mathrm{B}} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \frac{180^\circ - \omega}{2} \Leftrightarrow 3\omega = 108 \Leftrightarrow \omega = 36^\circ.$$

(β) Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΜ η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος θα έχουμε

$$\mathrm{A\hat{B}K} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ = \mathrm{A\hat{M}K}\,.$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΜ = ΑΒ. Από υπόθεση είναι ΑΒ = ΑΓ. Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΖΑΒ έχουμε

$$\mathrm{A\hat{Z}B} = 180^\circ - 2\hat{\mathrm{B}} = 180^\circ - 2\cdot 72^\circ = 36^\circ = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}\,.$$

Επομένως και το τρίγωνο ΓΑΖ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΓΖ. Άρα έχουμε:

ΑΜ = ΑΒ = ΑΓ = ΓΖ.

(γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε: $\Lambda\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = 90^\circ - \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$, ενώ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΒ έχουμε: $\Lambda\mathrm{BZ} = \mathrm{KB}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

Άρα έχουμε: $\Lambda\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \Lambda\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 18^\circ \Rightarrow \Lambda\mathrm{BZ}$ ισοσκελές τρίγωνο με ΒΛ = ΛΖ.

Πρόβλημα 4

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = (x+y)\cdot z^m - w$.

Λύση

Από τη συνθήκη, οι x, y, z, w, m είναι οι αριθμοί 1,2,3,4,5 με διαφορετική ίσως σειρά.

Για τη μέγιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο ελάχιστος, δηλαδή $w=1$. Τους αριθμούς 4 και 5 πρέπει να τους χρησιμοποιήσουμε στη δύναμη z^m. Παρατηρούμε ότι $4^5 > 5^4$, οπότε για τη μέγιστη τιμή $z=4, m=5$. Οπότε απομένει να έχουμε $x+y=2+3=5$. Συνεπώς η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $5\cdot 4^5 - 1 = 5\cdot 1024 - 1 = 5119$.

Για την ελάχιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο μέγιστος, δηλαδή $w=5$ και η δύναμη z^m να είναι η ελάχιστη, οπότε $z=1$. Η μικρότερη τιμή τώρα για το $x+y$ είναι $x+y=2+3=5$ η ελάχιστη τιμή είναι $5\cdot 1^4 - 5 = 0$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την ανίσωση: $2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4}$$

και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

Λύση. Έχουμε:

$$2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$$

$$\Leftrightarrow 2x + x^2 - 1 < x^2 + x - 2 + \lambda \Leftrightarrow x < \lambda - 1,$$

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x - 2 - 3 > 2x - 2 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$